Le Terne Pitagoriche particolari

(composte da centinaia di cifre…)

di Giovanni Di Maria
email: calimero22@freemail.it

(1ª PARTE)

Di **terne pitagoriche** si è parlato già ampiamente, anche sulla rete: si tratta di un gruppetto formato da tre numeri (rispettivamente i due cateti e l'ipotenusa di un ipotetico triangolo rettangolo) obbligatoriamente interi e che soddisfino l'eguaglianza:

$$c1^2 + c2^2 = ipo^2$$

dove *c1* e *c2* costituiscono i due cateti e *ipo* costituisce l'ipotenusa.

Per essere una Terna Pitagorica occorre quindi che si verifichi la condizione generale, ossia che i tre parametri siano tutti numeri interi.

Esistono naturalmente infinite combinazioni possibili, in quanto si tratta sempre di una formazione non critica ad alta probabilità di avvenimento.

Esempi importanti (semplici da calcolare anche mentalmente) sono rappresentati dai gruppi (3, 4, 5) oppure (5, 12, 13).

In questo articolo tratterò solamente di quelle terne in cui la misura di un cateto sia consecutiva (quindi distante di una unità) all'altro cateto.

Iniziamo subito da un esempio, poi fornirò un metodo *balistico* per il calcolo e la determinazione.

Le terne (3, 4, 5) e (20, 21, 29) e (119, 120, 169) e (696, 697, 985) e così via, costituiscono validamente delle terne pitagoriche in quanto, come si può notare, ciascun cateto dista dall'altro cateto proprio <u>di una unità</u>, ed inoltre i tre parametri sono <u>numeri interi</u>.

Provate ad effettuare, con il Teorema di Pitagora, il calcolo e vedrete che i gruppi sono verificati.

Calcolare le terne con l'ausilio di un elaboratore è oltremodo semplice. Utilizzando un linguaggio di programmazione è possibile fare in modo che una variabile incrementi il suo valore di una unità sino alla ricerca del risultato voluto.

Ma cosa succede quando la "fame" di numeri e di risultati aumenta a dismisura sino a pretendere quantità di lunghezza spropositata e di grandezza stratosferica?

Con i normali metodi di calcolo possiamo sicuramente abbandonare il nostro lavoro per la presenza di due problemi apparentemente irrisolvibili:

1) I normali linguaggi di programmazione basano i propri valori numerici su pochi bit, pertanto la precisione e l'accuratezza (quindi il numero delle cifre composte) è estremamente basso. In altre parole potremo solo usare numeri formati al massimo da 8-12 cifre significative e "realmente" esistenti, in quanto la semplice notazione esponenziale non si presta affatto per lo scopo;
2) Ammesso che il linguaggio di programmazione ci permetta di risolvere il problema n. 1, ci troviamo davanti "all'insormontabile" fattore **tempo**, che purtroppo ci mette davanti un limite pratico di calcolo. Basti pensare infatti che, per calcolare una terna consecutiva composta dai numeri (927538920, 927538921, 1311738121) occorrerebbero, in media, 30 giorni. Questo tempo proibitivo si avrebbe però utilizzando un algoritmo non ottimizzato, quindi non idoneo.

Vediamo allora come generare delle Terne Pitagoriche, di cateti consecutivi, in un tempo pressoché immediato.

Abbandoniamo a priori l'utilizzo di un semplice linguaggio di programmazione in quanto, come detto, non dispone della dovuta precisione.
Utilizziamo pertanto l'interprete Basic **UBASIC**, liberamente distribuito sulla rete ed operante in Dos. Questo interprete, quasi uguale al cugino GWBASIC, permette una precisione straordinaria nella gestione dei numeri arrivando, a volte, a gestire bene numeri sino a 2000 cifre !!!
Analizziamo passo dopo passo il problema. Fornirò di volta in volta vari algoritmi, sempre più perfezionati.

ALGORITMO (1° metodo estremamente LENTO)

Per trovare le terne abbiamo bisogno di "processare", attraverso un contatore, tutti i numeri progressivi da 1 a *limite*, quest'ultimo sufficientemente grande.
Per ogni numero quindi si effettuano le seguenti operazioni:

- Il valore del contatore costituisce la misura di un cateto (C1);
- Calcolare la misura dell'altro cateto semplicemente aggiungendo una unità, per determinare la consecutività (C2);
- Determinare con il Teorema di Pitagora la misura dell'ipotenusa (IP);
- Controllare se tale ipotenusa (IP) sia un intero o meno;

- Se IP è intero allora possiamo stampare i valori di C1, C2 e IP e possiamo considerarli membri di una Terna Pitagorica di cateto consecutivo.

L'idea è effettivamente buona, se non fosse per il tempo che ostacola e ci mette il bastone tra le ruote. Come detto prima, per arrivare a processare tutti i cateti da 1 a un miliardo occorre circa un mese di tempo, gestendo solamente 9 cifre. Quanti anni occorrerebbero per processare cateti formati da centinaia di cifre? Non basterebbero sicuramente migliaia di vite dell'universo e nemmeno un super computer in grado di elaborare miliardi di istruzioni in un pico-secondo, per portare a termine il lavoro.

Ma esiste una soluzione. Propongo innanzitutto il listato in UBASIC, per la ricerca delle terne. Il metodo utilizzato pertanto (per il momento) è quello della "*forza bruta*" in quanto esso cerca indiscriminatamente tutti i possibili valori da 1 a *limite* (nell'esempio 10^200).

```
10   point 200
20   cls
30   N=0
40   while N<10^200
50         N=N+1
60         C1=N:C2=N+1:IP=sqrt(C1*C1+C2*C2)
70         R=IP-int(IP)
80         if R=0 then print C1;C2;IP
90   wend
```

Il listato è funzionante ma non funzionale. E' estremamente lento. Commentiamo le varie istruzioni presenti nei numeri di linea:

10 Predispone la gestione sino a 963 decimali;
20 Cancella il video;
30 Inizializza il contatore a zero (punto di partenza);
40 Crea un ciclo ripetitivo che si ripeterà sino a quando N arriva a 10E200 !!!
50 Incrementa di una unità il contatore;
60 Assegna a C1 il valore di N, C2 il valore successivo e calcola ipotenusa;
70 Controlla se ipotenusa è intero, guardando se ha cifre decimali;
80 Se è intero allora stampa la TERNA PITAGORICA;
90 Fine ciclo.

Come si vede il listato è semplice.

Riporto adesso alcuni risultati generati dopo alcune ORE di funzionamento:

CATETO 1	CATETO 2	IPOTENUSA		Rapporto di Cateto1 e Cateto1 precedente
3	4	5		
20	21	29		6,666666667
119	120	169		5,950000000
696	697	985		5,848739496
4.059	4.060	5.741		5,831896552
23.660	23.661	33.461		5,829021927
137.903	137.904	195.025		5,828529163
803.760	803.761	1.136.689		5,828444631
4.684.659	4.684.660	6.625.109		5,828430128
27.304.196	27.304.197	38.613.965		5,828427640

Siamo ancora ben lungi dal parlare di GRANDI NUMERI.
Dopo un'attenta osservazione alle terne generate, salta subito all'occhio un particolare veramente importante: guardate il *rapporto* che esiste tra un qualsiasi cateto1 ed il cateto1 precedente (esempio: 119/20 oppure 23.660/4.059 oppure ancora 4.684.659/803.760).

Come si può ben osservare esso tende, sempre di più, al numero 5,82842712475 cioè:

$$5{,}82842712475 = 3 + \left(2\sqrt{2}\right)$$

Questo vuol dire che se, appena viene trovato una terna, moltiplichiamo il cateto 1 per tale coefficiente, "saltiamo" direttamente ad esaminare il prossimo cateto, con il risparmio di tantissimo tempo.

ALGORITMO (2° metodo estremamente VELOCE)

Sviluppiamo pertanto l'algoritmo con questa nuova ottimizzazione, che consentirà di trovare rapidamente le terne pitagoriche, formate anche da centinaia di numeri, senza dover attendere miliardi di anni ….

Per ogni numero quindi si effettuano le seguenti operazioni:

- Il valore del contatore costituisce la misura di un cateto (C1);

- Calcolare la misura dell’altro cateto semplicemente aggiungendo una unità, per causare la consecutività (C2);
- Determinare con il Teorema di Pitagora la misura dell’ipotenusa (IP);
- Controllare se tale ipotenusa (IP) sia un intero o meno;
- Se IP è intero allora possiamo stampare i valori di C1, C2 e IP e possiamo considerarli una Terna Pitagorica di cateto consecutivo, ma a differenza del precedente algoritmo, il contatore adesso è **moltiplicato** per la costante 5,82842712475, in modo che esso stesso avanzi più “velocemente” rispetto l’incremento di una sola unità ma soprattutto che vengano “saltate” le altre misure dei cateti che non fornirebbero sicuramente risultati utili.

In questo modo, in pochissimi istanti verranno visualizzati sullo schermo tutte le terne pitagoriche formate da centinaia di cifre, sino al limite impostato a 10^200. Ecco il listato definitivo:

```
10  point 200
20  cls
30  Rapp=sqrt(2)*2+3
40  N=0
50  while N<10^200
60        N=N+1
70        C1=N:C2=N+1:IP=sqrt(C1*C1+C2*C2)
80        R=IP-int(IP)
90        if R=0 then:print C1:print C2:print IP:print:N=int(N*Rapp)
100 wend
```

Commentiamo le righe di programma:

10 Definisce la precisione numerica a 963 cifre decimali;
20 Cancella il video;
30 Crea la variabile *rapp* contenente il coefficiente di incremento geometrico;
40 Inizializza a zero il contatore;
50 Crea un ciclo ripetitivo che si ripeterà sino a quando N arriva a 10E200 !!!
60 Incrementa di una unità il contatore;
70 Assegna a C1 il valore di N, C2 il valore successivo e calcola ipotenusa;
80 Controlla se ipotenusa è intero, guardando se ha cifre decimali;
90 Se è intero allora stampa la TERNA PITAGORICA e in più <u>innalza il valore</u> del contatore al prossimo della serie del cateto successivo;
100 Fine ciclo

Ecco la tabella dei numeri generati. Ho dovuto troncarla sino a questo punto perché lo spazio occupato dai numeri è cresciuto rapidamente. Ma vi assicuro che le cifre generate sono tantissime.

Cateto 1	**Cateto 2**	**Ipotenusa**
3	4	5.0
20	21	29.0
119	120	169.0
696	697	985.0
4059	4060	5741.0
23660	23661	33461.0
137903	137904	195025.0
803760	803761	1136689.0
4684659	4684660	6625109.0
27304196	27304197	38613965.0
159140519	159140520	225058681.0
927538920	927538921	1311738121.0
5406093003	5406093004	7645370045.0
31509019100	31509019101	44560482149.0
183648021599	183648021600	259717522849.0
1070379110496	1070379110497	1513744654945.0
6238626641379	6238626641380	8822750406821.0
36361380737780	36361380737781	51422757785981.0
211929657785303	211929657785304	299713796309065.0
1235216565974040	1235216565974041	1746860020068409.0
7199369738058939	7199369738058940	10181446324101389.0
41961001862379596	41961001862379597	59341817924539925.0
244566641436218639	244566641436218640	345869461223138161.0
1425438846754932240	1425438846754932241	2015874949414289041.0
8308066439093374803	8308066439093374804	11749380235262596085.0
48422959787805316580	48422959787805316581	68480406462161287469.0
282229692287738524679	282229692287738524680	399133058537705128729.0
1644955193938625831496	1644955193938625831497	2326317944764069484905.0
9587501471344016464299	9587501471344016464300	13558774610046711780701.0
55880053634125472954300	55880053634125472954301	79026329715516201199301.0
325692820333408821261503	325692820333408821261504	460599203683050495415105.0
1898276868366327454614720	1898276868366327454614721	2684568892382786771291329.0
11063968389864555906426819	11063968389864555906426820	15646814150613670132332869.0
64485533470821007983946196	64485533470821007983946197	91196316011299234022705885.0
375849232435061491997250359	375849232435061491997250360	531531081917181734003902441.0
2190609861139547943999555960	2190609861139547943999555961	3097990175491791170000708761.0
12767809934402226172000085403	12767809934402226172000085404	18056409971033565286000350125.0
74416249745273809088000956460	74416249745273809088000956461	105240469650709600546001391989.0
433729688537240628356005653359	433729688537240628356005653360	613386407933224037990008001809.0
2527961881478169961048032963696	2527961881478169961048032963697	3575077977948634627394046618865.0
14734041600331779137932192128819	14734041600331779137932192128820	20837081459758583726374271711381.0
…..	…..	…..
…..	…..	…..

Riporto infine, solo per curiosità, l’ultima terna generata dopo pochissimi istanti: si tratta di un numero enorme:

Cateto1:
38.870.796.548.368.940.451.592.529.482.185.869.982.938.448.205.812.640
.195.914.560.739.542.103.841.403.178.847.163.517.462.769.143.179.065.0
31.576.973.812.014.377.488.506.777.895.445.800.461.891.869.308.645.201
.761.858.965.032.907.136.032.847.098.509.289.762.520.539

Cateto2:
38.870.796.548.368.940.451.592.529.482.185.869.982.938.448.205.812.640
.195.914.560.739.542.103.841.403.178.847.163.517.462.769.143.179.065.0
31.576.973.812.014.377.488.506.777.895.445.800.461.891.869.308.645.201
.761.858.965.032.907.136.032.847.098.509.289.762.520.540

Ipotenusa:
54.971.607.658.948.646.301.386.783.144.964.782.698.772.613.513.307.493
.180.078.896.702.918.825.851.648.683.235.325.858.118.170.150.873.214.9
78.343.601.463.118.106.546.653.220.435.805.362.395.962.991.295.556.488
.036.606.954.237.309.847.762.149.971.207.793.263.738.989

Come si può notare, il cateto1 e il cateto2 differiscono di una unità, quindi sono consecutivi.
Neanche le stelle dell'Universo arrivano a simili quantità!

Bene, con questo è tutto. Spero che vi siate appassionati all'argomento e vi do appuntamento per i prossimi articoli

Giovanni Di Maria

Le Terne Pitagoriche particolari

(composte da **migliaia** di cifre…)

di Giovanni Di Maria

email: calimero22@freemail.it

ottobre 2005

(2ª Parte)

Durante la prima parte dell'articolo (vedi precedente pdf) abbiamo intrapreso lo studio e la ricerca delle **Terne Pitagoriche Particolari a distanza 1**, ossia quelle speciali Terne in cui i cateti siano consecutivi l'uno rispetto all'altro.
Ricordiamo altresì che le Terne Pitagoriche sono gruppetti formati da tre numeri (rispettivamente i due cateti e l'ipotenusa di un ipotetico triangolo rettangolo), tutti interi che soddisfino l'eguaglianza:

$$c1^2 + c2^2 = ipo^2$$

dove *c1* e *c2* costituiscono i due cateti e *ipo* costituisce l'ipotenusa.

Per essere una Terna Pitagorica occorre quindi che si verifichi la condizione generale, ossia che i tre parametri siano tutti numeri interi.

"*"**

Con l'ausilio dell'interprete **Ubasic**, utilizzato nel precedente articolo, senza dubbio i risultati ottenuti sono stati del tutto soddisfacenti, però con un unico limite: la procedura non è andata oltre alla generazione di 400 cifre, per il verificarsi di un overflow del software.
In effetti 400 cifre sono un numero abbastanza considerevole, ma a noi non basta: vogliamo andare oltre !!!
Pertanto con questo articolo proviamo a sfidare la matematica ed il tempo per irrompere nel campo delle 1000 cifre e oltre.
Abbandoniamo pertanto (solo per ora …) il programma **Ubasic** e ne utilizziamo un altro più "robusto": il famoso **BC**, nativo in ambiente Unix ma poi tradotto per piattaforme Dos e Windows.

Si tratta di un interprete aritmetico, con cui è possibile eseguire calcoli matematici a precisione illimitata e routines in pseudo linguaggio C, per la realizzazione di piccoli algoritmi.

Iniziamo dunque la programmazione del software di ricerca fornendo il listato, da trascrivere con qualsiasi editor di testo Ascii:

```
define int(x) {
   sc=scale
   scale=0
   risultato=x/1
   scale=sc
   return(risultato)
}

fine=10^5000
tot=0
scale=5000
incremento=2*sqrt(2)+3

for (n=1;n<=fine;n++) {
    cat1=n
    cat2=n+1
    ipot=sqrt(cat1^2 + cat2^2)
    if ((ipot-int(ipot))==0) {
       tot=tot+1
       print "Cateto 1  ",cat1,"n"
       print "Cateto 2  ",cat2,"n"
       print "Ipotenusa ",int(ipot),"n"
       print "Progress. ",tot,"n"
       print "************************n"
       n=int(n*incremento)+2
    }
}
```

Come si vede il programma è semplicissimo: si tratta di un contatore che, ciclicamente, ricerca tutti i cateti sino a quando si verificano le condizioni di consecutività e di assenza di decimali all'ipotenusa.

Appena l'elaboratore trova una terna corretta, procede alla stampa ed incrementa il contatore per il rapporto costante :

$$5{,}82842712475 = 3 + \left(2\sqrt{2}\right)$$

che ne determina il passo incrementale geometrico dei cateti.

Questo vuol dire che appena viene trovata una terna, il programma moltiplica il *cateto 1* per tale coefficiente, saltando direttamente ad esaminare il prossimo cateto, con il risparmio di tantissimo tempo.

Il comando per invocare l'interprete, da prompt di MS-Dos, è il seguente:

BC < *nomefile*

per ottenere il risultato a video mentre:

BC < *nomefile* > *risultato*

per ottenere il risultato su un file di testo di nome risultato, molto più comodo da consultare e controllare.

Riporto infine l'ultima terna generata dopo 1 ora di elaborazione: si tratta di tre numeri enormi, formati ognuno da circa 1500 cifre!

Cateto 1

```
76464005684341623155546601206425731202317122924471
24640328524841657467085484518532511607471128221742
56529050277474021419370703882436785234206682053692
11415655549755970416086232601357635423556075245455
94371920927924926636706788567587010744185569729106
06088061250728159745033858966105696536263567457855
09816738801891593693306634983741261390927848664666
37531311453496167928151960263766677923953354492094
20802448069345691631455884194423834232413662743350
06251889318752531740354008918919224009993196038849
79707003262338505565438794926706221331329948106389
81485843173720013764965821003486348454623916609995
14766627916745513887841344999705648300973899069419
32512776496817095003050772038709521316577783199857
56143143087574406586220511044987296429029833996871
47118155265532990910191231434056661215729651723222
57878214087949188395769147765428664766833814832565
97823264815891339723069166194726283558866227825800
39524787017471968051069525422932295271847492988709
08683419576230163615259415795882458778465093474546
77597909186187770470531891851782616853911208115575
98150903338562742627516065512973880472662798546911
38830876572533865121710191971313179694143771223629
51448495303307881747620869161521882803379908351107
04313109213616029146633704708197258650721863382342
37804835719290281874132864304872230860642430843434
17752389752606105185938267393250042520222033440318
94464956148937986036825639778244451048735417164737
76268740706488286579353605933724946235043085558881
59304229299011392709115823339375068035367765697796
35817406355314639614782300382403
```

Cateto 2

7646400568434162315554660120642573120231712292447l
24640328524841657467085484518532511607471128221742
56529050277474021419370703882436785234206682053692
11415655549755970416086232601357635423556075245455
94371920927924926636706788567587010744185569729106
06088061250728159745033858966105696536263567457855
09816738801891593693306634983741261390927848664666
37531311453496167928151960263766677923953354492094
20802448069345691631455884194423834232413662743350
06251889318752531740354008918919224009993196038849
79707003262338505565438794926706221331329948106389
81485843173720013764965821003486348454623916609995
14766627916745513887841344999705648300973899069419
32512776496817095003050772038709521316577783199857
56143143087574406586220511044987296429029833996871
47118155265532990910191231434056661215729651723222
57878214087949188395769147765428664766833814832565
97823264815891339723069166194726283558866227825800
39524787017471968051069525422932295271847492988709
08683419576230163615259415795882458778465093474546
77597909186187770470531891851782616853911208115575
98150903338562742627516065512973880472662798546911
38830876572533865121710191971313179694143771223629
51448495303307881747620869161521882803379908351107
04313109213616029146633704708197258650721863382342
37804835719290281874132864304872230860642430843434
17752389752606105185938267393250042520222033440318
94464956148937986036825639778244451048735417164737
76268740706488286579353605933724946235043085558881
59304229299011392709115823339375068035367765697796
3581740635531463961478230038241

Ipotenusa

10813643387216935644003928085379233897483762198783
91756057166874916021297425679003640760785546447087
85519137729930109617968854663148098568263265122154
62412137259538598748454309592111903866354690992825
64519899578913213397695222418261277929429289735594
88579442313006210713575034933801348344824190811290
31097163432523137322638703105847944731108819036772
65929419151993806870088815629240742789971721548272
22841873597607733207627565560235886139074615581497
84115986039552372810719226070380376558594122790312
17044150239755429912473593270724863865997585351949
97112792129428391999794239322829736954576274245377
99094419237463664732743971143526898703667612794011
73094956587541914684818053579944151446221782722163
96586812717407177437701612017702986140048779665655
05290710361641569914943539760591901198448684089264
68476627204055536809585962780342756420236635100749
49798208384312244823792884952503178372275142920944
91181753306816250622618148589417940522182425298776
95100746579753626657811603009709464783189127355330
49617359950975707534281810055451660299828203802560
85888213418985641606281795279412431743809548598354
75231303446890030995129444100823773994889106353165
92059439416702792090365748746271740302866734135049
95144395059758861971805529220625067734188253396193
02295522694256175247764853170685663748456719084150
02095439528378175955275809424402559498199326016421
49789865510656634350975061087486035371732476231974
35463036308918439898691118666822909492176296345289
33837991596651853506428318616286760813789743025514
31641224319123885173677618346209

Con questo è tutto. Sperando che l’articolo sia stato di vostro gradimento, do appuntamento per le prossime ricerche.

Giovanni Di Maria

ALLEGATO

Terna composta da quasi **4000 cifre** !!!

(Elaborazione eseguita in circa 10 ore, poi il Windows è andato in TILT)

Nota: Questa terna costituisce la 4977ª in ordine progressivo assoluto

Cateto 1

85091767954015520131711108036506634344932738354265465413721439800973511888385702
64881295045974006218093004261495887452598654128186410720015471907336636195960068
42319227923582362489287896755382449288625644555189029868948109667952030675480866
81642480479977543770393938117485150800780838400365429736765500146359844883766153
64461087981121924934807320074380176007856379810556699409727631356149494565040977
20526563535530469550503919191829488204691779265500180131203510132360805557079207
13211548876223728337750537121509342788586183931692296743564955402072325876095768
25406006234778855464677986766889709520082576016460079154154322351663407058685729
91376600142185854340273043801500330356165283263703003112277505541339847934931277
67351192224078838880987025045030614619882875118101904211137974999054995541573751
88062854807561205371043435926687940254331007141640628413694940449284954239618556
42663687808817611307946013443632238811545372216958531452297497474333116844451416
88198399240198255903378125668746213651139416808488813801316752573401233288533788
07339731233582647441830019731690089960569575743206004981815021073392634092642534
972278710268379263817800261974920551461835508295676323460006394999942446937982679
34624050977498577931965591043298928004720813173025623049479888188283706562208642
04884782700684583181301282013240116611556348600617745922384813030827608288247682
77827215909392519504594041153716808301274329353265354047553449468968368387591956
56506574764484138964026592316389902616147842983474921367674639765992430712244931
56242161478835888746997885558888204795335694324466060680041515284742715684329230
65520580607644099970191344629037947109642363345790114911865982215105139553286109
19987922598218367747293012391564908008658575683495161332036771478968513273475668
46735864343218544662101362783092660392393040153359956192151489490983246408243407
39316554096929790706719123179840915104308789176161989240493466214734653692598884
96686436654005605728742749271841127133266771270867026998402357596497438196747787
61709858693233402621955968576580414264192117026363778545668636276185888303008348
30573790660202060162172580194255776587172762406396986671144599106019368617909898
14919296929084620990303238219585782864428479207448542715273692108003155056333803
33461376004844010508079541431267482307017419472683877515102219713666824297668012
03585642328633903431388323154143652480094636776820299725502963749618817677689150
60648212711534613304309572798332475438924622848235611600786209352644045126930548
10537184750277121070632987225956522046362520990987845978465681676067700787300458
42764557932143823902939237619004495050087958840224054910757824252196171778530395
40073349789503843341246949173363940416703076761551340126639752377263187678855609
45259515556136518403297779764437647108302532639266938925441074786794983296718688
95785185688373417709951904429741582228411987215821515985600608406349225705169161
34368361003731538519967775200206476051855213713393954352317267136327154057258830
00416365452997967646003979897831926534210483240243340265732173236362533669841399
13465811938019136339755430437104606945471428160653924558772345018583303665544749
01774985817306793442906284226897775720875618084106915926383849244662316876893963
29357822246212267891676799390415918850251122320083840193260849487305691988397141
38953782127653393635812071388889699452687493344262734286830916363195582506389605
26762396014901148895705438350851829240448678112011593308937886874906487369943000
07897847802159443351462134246455074605633519020115158204287956715558734278507649
59390827077697547634007861928208538818310960143267410558988463774942652380371011
98983050594993730946171406940242386056969101769871901113921235086099946035425582
13617354519280637709476966346420569724419119022883126595324480834552527465636643
90906003600940135440357355613910897013528872550179

Cateto 2

85091767954015520131711108036506634344932738354265465413721439800973511888385702
64881295045974006218093004261495887452598654128186410720015471907336636195960068
42319227923582362489287896755382449288625644555189029868948109667952030675480866
81642480479977543770393938117485150800780838400365429736765500146359844883766153
64461087981121924934807320074380176007856379810556699409727631356149494565040977
20526563535530469550503919191829488204691779265500180131203510132360805557079207
13211548876223728337750537121509342788586183931692296743564955402072325876095768
25406006234778855464677986766889709520082576016460079154154322351663407058685729
91376600142185854340273043801500330356165283263703003112277505541339847934931277
67351192224078838880987025045030614619882875118101904211137974999054995541573751
88062854807561205371043435926687940254331007141640628413694940449284954239618556
42663687808817611307946013443632238811545372216958531452297497474333116844451416
88198399240198255903378125668746213651139416808488813801316752573401233288533788
07339731233582647441830019731690089960569575743206004981815021073392634092642534
97227871026837926381780026197492055146183550829567632346000639499942446937982679
34624050977498577931965591043298928004720813173025623049479888188283706562208642
04884782700684583181301282013240116611556348600617745922384813030827608288247682
77827215909392519504594041153716808301274329353265354047553449468968368387591956
56506574764484138964026592316389902616147842983474921367674639765992430712244931
56242161478835888746997885558888204795335694324466060680041515284742715684329230
65520580607644099970191344629037947109642363345790114911865982215105139553286109
19987922598218367747293012391564908008658575683495161332036771478968513273475668
46735864343218544662101362783092660392393040153359956192151489490983246408243407
39316554096929790706719123179840915104308789176161989240493466214734653692598884
96686436654005605728742749271841127133266771270867026998402357596497438196747787
61709858693233402621955968576580414264192117026363778545668636276185888303008348
30573790660202060162172580194255776587172762406396986671144599106019368617909898
14919296929084620990303238219585782864428479207448542715273692108003155056333803
33461376004844010508079541431267482307017419472683877515102219713666824297668012
03585642328633903431388323154143652480094636776820299725502963749618817677689150
60648212711534613304309572798332475438924622848235611600786209352644045126930548
10537184750277121070632987225956522046362520990987845978465681676067700787300458
42764557932143823902939237619004495050087958840224054910757824252196171778530395
40073349789503843341246949173363940416703076761551340126639752377263187678855609
45259515556136518403297779764437647108302532639266938925441074786794983296718688
95785185688373417709951904429741582228411987215821515985600608406349225705169161
34368361003731538519967775200206476051855213713393954352317267136327154057258830
00416365452997967646003979897831926534210483240243340265732173236362533669841399
13465811938019136339755430437104606945471428160653924558772345018583303665544749
01774985817306793442906284226897775720875618084106915926383849244662316876893963
29357822246212267891676799390415918850251122320083840193260849487305691988397141
38953782127653393635812071388889699452687493344262734286830916363195582506389605
26762396014901148895705438350851829240448678112011593308937886874906487369943000
07897847802159443351462134246455074605633519020115158204287956715558734278507649
59390827077697547634007861928208538818310960143267410558988463774942652380371011
98983050594993730946171406940242386056969101769871901113921235086099946035425582
13617354519280637709476966346420569724419119022883126595324480834552527465636643
90906003600940135440357355613910897013528872550180

Ipotenusa

1203379322868730582461752684193629688212337171733482987274078218799253665103218
7
26354834184942039300826927544510686867155335300130674505329092315550424999670690
43732301275831139143722108520136677536656468921412131185601958573333214064881564
22057282696591957147775740624663559204371818670580650581729118524304317114410311
00397824753445333962228366297221082009856678173989139252157246769138161296265736
22181310549299237371694130916779237877415803551216924761752970864321941072315113
63234711038067724705921854460000674385094993378767017377742964240759236331009487
61918618156747882382507180140590956356168774178353099468236945584572483941062407
46151450708965397258298025762887810032741597077263772119614350309627939177583705
52976055677022604025412320748043496121350306124450584719376972005776996409826977
27249478022970290202822657976140102521659429187911799143461267564173647454833816
94550420457612273931734045639412956493457942340725826318331809185210915065346478
53719122336255274414644775839031815691237725345478392990625114803711547940296477
94771610293610359104730280425477418831084984698447354167248852048370608326469671
58189997409134277916905745737402870931564505580238597297114889481615784492555571
42745249091279182395741883863166667450004103169511652481457125908285031064473229
24118497646993450311234825831468814825897258758403090811447388077307134514844265
62329840020526964394236503511774649265084943234305113588206939314979860424912298
07522962045419699981064749030277077714625828591602935891825016175971272603162274
71959829924489509913391706899803425910160246229925914549176475216498001793851230
89443836906383156431867828745904816526245588186641551971404113038240928060308253
38910171874199530461184578731196797605811420331023922880927416387494865468662914
44818689967538256189842240503466393634653380908480705516441454991445901416061469
47102740579435481932090332254700242791935373312242047033331881479762246646968682
28826676544686328153049998488745293797554038272707520247134820168076620147718846
08370986963714424790944955967560185700670834252392765237976425217707864538990082
51686106259328929667460633437370221544921875892860356107975363158356907106301598
78514017357800880498374696351251115326755489647064625783809500056065176387833800
40219154290429775725544915222523762524425825997218136288415594997599304504305639
95007355663987488480673006755969013067404364956524621378266499166306961440574183
13669364507038145560430504881592389341385118592936776060818047309729515027906492
07681813128554280502534533376844004278628651635759966350662807823623169318603304
97692006709889854856977121336227289382788077875714583467731855254753141768600700
09507332180828988111792717154810160343405339437080379056102634579050801519173358
60816757807005766712812248811582576383303713756939406621173282177811641164628026
61580697469580428506098597321948622818848736934848678448558996159840017219682327
74109473141952752570806942817010063732102851244363543746792218598747567254630035
33035286516917708893440466206614253161678305259778831684690298575842010738436987
25128182992772738583379412245515673546640843796717616255197340587594716294494088
73205514864692034960132594470087123256689339731337774592364361020803271493689004
18724710527328927536051715517620465023002959007926105313518359338059278956637199
45276110436126734543756435102757439826827697674381649996377869079187790254838447
83225855642922937095967406427217357122528651079569051990788755575282781670025900
74608869554486589495009137169149377332233417433424321101802785670955723974992989
21145797285430231216218010489876492716898326714015402693018484179084770207723805
75351747515056163837924204281676949052137084787166914851480679398932190364358842
13447013558789546752436452774908101965886704254604181696318853089323283517939972
5361803279830086104166497700754928210246403532642229

Le Terne Pitagoriche particolari

“La Formula Risolutiva”

di Giovanni Di Maria
email: calimero22@freemail.it

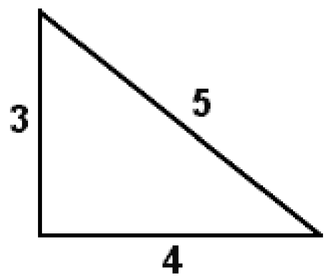
agosto 2008

(3ª Parte)

Questo terzo articolo pone fine alla ricerca sistematica di algoritmi e tentativi iterativi, in quanto propone una “formula diretta” per il calcolo e la determinazione della Terna Pitagorica Particolare, con distanza tra i cateti pari all’unità.

La formula risolutiva, naturalmente implementabile su qualsiasi sistema e con qualsiasi linguaggio di programmazione, ha lo scopo di ricavare direttamente, ed in tempi rapidissimi, la misura dei cateti e dell’ipotenusa, rispettando la condizione che i due cateti devono essere a distanza 1, cioè la loro differenza deve esse pari all’unità.

Ricordiamo che il più piccolo triangolo rettangolo che corrisponde a questa specifica è il seguente:



I due cateti hanno differenza 1 e l’ipotenusa calcolata è intera.

I precedenti due articoli, che invito comunque a rileggere, presentavano metodi e algoritmi per la ricerca delle Terne Pitagoriche Particolari ma, applicando un metodo iterativo e ricorrendo a dei “salti” sofisticati, il tempo di calcolo era inaccettabile, specialmente all’aumentare del numero delle cifre delle tre dimensioni.

Ecco perché mi sono messo alla ricerca di una formula che, direttamente e velocemente, desse il risultato, senza applicare alcun algoritmo ma eseguendo semplicemente alcuni calcoli. Naturalmente, per la determinazione di dimensioni “titaniche”, cioè composte da migliaia di cifre, è indispensabile un elaboratore elettronico ed un adeguato programma di calcolo a precisione illimitata.

Ricordiamo le condizioni base per l’esistenza ed il calcolo di una terna pitagorica particolare corretta:

- Le tre dimensioni devono soddisfare l’equazione $c1^2 + c2^2 = ipo^2$;
- Le dimensioni devono essere numeri interi, senza decimali;
- la misura di un cateto deve essere consecutiva (quindi distante di una unità) all’altro cateto.

La scoperta di un nesso

Dopo settimane di studio, ricerca e tentativi, ho trovato alcuni elementi che caratterizzavano la successione ordinata delle Terne Pitagoriche Particolari, che adesso vado ad evidenziare. Ripropongo l'elenco delle prime 10 Terne Pitagoriche Particolari, già visto nei precedenti articoli, indicando l'esistenza di alcuni nessi:

Progr.	CATETO 1	CATETO 2	IPOTENUSA		Rapporto di Cateto1 e Cateto1 precedente
1	3	4	5		
2	20	21	29		6,666666667
3	119	120	169		5,950000000
4	696	697	985		5,848739496
5	4.059	4.060	5.741		5,831896552
6	23.660	23.661	33.461		5,829021927
7	137.903	137.904	195.025		5,828529163
8	803.760	803.761	1.136.689		5,828444631
9	4.684.659	4.684.660	6.625.109		5,828430128
10	27.304.196	27.304.197	38.613.965		5,828427640

Ecco le caratteristiche matematiche che mi hanno permesso di determinare finalmente la formula risolutiva:

- Il rapporto tra un cateto di una terna e lo stesso cateto precedente tende al numero irrazionale 5,828427125. Questo numero, studiato già in precedenza è equivalente all'espressione:

$$5{,}828427125 = 3 + \left(2\sqrt{2}\right)$$

  o meglio ancora:

$$5{,}828427125 = 3 + \sqrt{8}$$

- Il rapporto tra l'ipotenusa ed un cateto tende al numero irrazionale 1,414213562 che, come si sa, equivale alla radice quadrata di 2:

$$1{,}414213562 = \sqrt{2}$$

- Eseguendo svariate interpolazioni, allo scopo di applicare un adeguato "curve fitting", ho finalmente trovato la **formula risolutiva** per determinare la ennesima terna pitagorica particolare, secondo il modello di equazione denominato "Modified Power":

$$\text{ipotenusa}(x) = a\, b^{x}$$

dove:

- *Ipotenusa* è naturalmente la misura dell'ipotenusa intera da calcolare;
- *(X)* è il numero d'ordine dell'ipotenusa, ed in generale, di tutta la Terna Pitagorica Particolare;
- *"a"* è una costante irrazionale pari a 0,8535539. Dopo giorni di studio ho realizzato che essa è pari a:

$$a = 0{,}8535539 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)$$

- *"b"* è una costante irrazionale pari a 5,8284271 e come detto sopra essa è pari a:

$$b = 5{,}828427125 = \left(3 + \sqrt{8}\right)$$

- *"x"* è semplicemente il numero d'ordine della terna che si vuol cercare, come ad esempio la 20ma, la 50ma e così via.

Generalizzando le formule, sostituendo le costanti e raggruppandole per intero si ha:

$$\text{ipotenusa}(x) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^{x}$$

$$\mathrm{cateto1(x)} = \frac{ipotenusa(x)}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{cateto2(x)} = cateto1(1) + 1$$

Un esempio pratico

Vogliamo determinare le dimensioni della Terna Pitagorica Particolare numero 10. Con le formule di cui sopra, determiniamo dapprima la misura dell'ipotenusa:

$$\text{ipotenusa}(10) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^{10}$$

Ipotenusa = 38613964,99999999676282919922 che arrotondiamo a 38.613.965.

* * *

Per la determinazione del cateto minore, dividiamo la misura dell'ipotenusa per la radice quadrata di 2, dal momento che il loro rapporto è pari a questo valore:

$$\text{cateto1}(10) = \frac{ipotenusa(10)}{\sqrt{2}}$$

Cateto1 = 27304196,50000000457805085017 che arrotondiamo a 27.304.196.

* * *

Per la determinazione del cateto maggiore, aggiungiamo semplicemente 1 alla misura del cateto minore:

$$\text{cateto2}(10) = cateto1(10) + 1$$

Cateto2 = 27304196 + 1 = 27.304.197.

Calcoliamo la terna n° 4977

Nella seconda parte del trattato, abbiamo calcolato la 4977ma terna, composta da quasi 4000 cifre, in un tempo di circa 10 ore!

Applicando la formula sopra descritta, è possibile risalire alla misura delle tre dimensioni, in un tempo pressoché immediato.

$$\text{ipotenusa}(4977) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(3 + \sqrt{8}\right)^{4977}$$

12033793228687305824617526841936296882123371717334829872740782187992536651032187
26354834184942039300826927544510686867155335300130674505329092315550424999670690
43732301275831139143722108520136677536656468921412131185601958573333214064881564
22057282696591957147775740624663559204371818670580650581729118524304317114410311
00397824753445333962228366297221082009856678173989139252157246769138161296265736
22181310549299237371694130916779237877415803551216924761752970864321941072315113
63234711038067724705921854460000674385094993378767017377742964240759236331009487
61918618156747882382507180140590956356168774178353099468236945584572483941062407
46151450708965397258298025762887810032741597077263772119614350309627939177583705
52976055677022604025412320748043496121350306124450584719376972005776996409826977
27249478022970290202822657976140102521659429187911799143461267564173647454833816
94550420457612273931734045639412956493457942340725826318331809185210915065346478
53719122336255274414644775839031815691237725345478392990625114803711547940296477
94771610293610359104730280425477418831084984698447354167248852048370608326469671
58189997409134277916905745737402870931564505580238597297114889481615784492555571
42745249091279182395741883863166667450004103169511652481457125908285031064473229
24118497646993450311234825831468814825897258758403090811447388077307134514844265
62329840020526964394236503511774649265084943234305113588206939314979860424912298
07522962045419699981064749030277077714625828591602935891825016175971272603162274
71959829924489509913391706899803425910160246229925914549176475216498001793851230
89443836906383156431867828745904816526245588186641551971404113038240928060308253
38910171874199530461184578731196797605811420331023922880927416387494865468662914
44818689967538256189842240503466393634653380908480705516441454991445901416061469
47102740579435481932090332254700242791935373312242047033331881479762246646968682
28826676544686328153049998488745293797554038272707520247134820168076620147718846
08370986963714424790944955967560185700670834252392765237976425217707864538990082
51686106259328929667460633437370221544921875892860356107975363158356907106301598
78514017357800880498374696351251115326755489647064625783809500056065176387833800
40219154290429775725544915222523762524425825997218136288415594997599304504305639
95007355663987488480673006755969013067404364956524621378266499166306961440574183
13669364507038145560430504881592389341385118592936776060818047309729515027906492
07681813128554280502534533376844004278628651635759966350662807823623169318603304
97692006709889854856977121336227289382788077875714583467731855254753141768600700
09507332180828988111792717154810160343405339437080379056102634579050801519173358
60816757807005766712812248811582576383303713756939406621173282177811641164628026
61580697469580428506098597321948622818848736934848678448558996159840017219682327
74109473141952752570806942817010063732102851244363543746792218598747567254630035
33035286516917708893440466206614253161678305259778831684690298575842010738436987
25128182992772738583379412245515673546640843796717616255197340587594716294494088
73205514864692034960132594470087123256689339731337774592364361020803271493689004
18724710527328927536051715517620465023002959007926105313518359338059278956637199
45276110436126734543756435102757439826827697674381649996377869079187790254838447
83225855642922937095967406427217357122528651079569051990788755575282781670025900
74608869554486589495009137169149377332233417433424321101802785670955723974992989
21145797285430231216218010489876492716898326714015402693018484179084770207723805
75351747515056163837924204281676949052137084787166914851480679398932190364358842
13447013558789546752436452774908101965886704254604181696318853089323283517939972
536180327983008610416649770075492821024640353264229

$$\text{cateto1}(4977) = \frac{\mathit{ipotenusa}(4977)}{\sqrt{2}}$$

85091767954015520131711108036506634344932738354265465413721439800973511888385702
64881295045974006218093004261495887452598654128186410720015471907336636195960068
42319227923582362489287896755382449288625644555189029868948109667952030675480866
81642480479977543770393938117485150800780838400365429736765500146359844883766153
64461087981121924934807320074380176007856379810556699409727631356149494565040977
20526563535530469550503919191829488204691779265500180131203510132360805557079207
13211548876223728337750537121509342788586183931692296743564955402072325876095768
25406006234778855464677986766889709520082576016460079154154322351663407058685729
91376600142185854340273043801500330356165283263703003112277505541339847934931277
67351192224078838880987025045030614619882875118101904211137974999054995541573751
88062854807561205371043435926687940254331007141640628413694940449284954239618556
42663687808817611307946013443632238811545372216958531452297497474333116844451416
88198399240198255903378125668746213651139416808488813801316752573401233288533788
07339731233582647441830019731690089960569575743206004981815021073392634092642534
972278710268379263817800261974920551461835508295676323460006394999942446937982679
34624050977498577931965591043298928004720813173025623049479888188283706562208642
04884782700684583181301282013240116611556348600617745922384813030827608288247682
77827215909392519504594041153716808301274329353265354047553449468968368387591956
56506574764484138964026592316389902616147842983474921367674639765992430712244931
56242161478835888746997885558888204795335694324466060680041515284742715684329230
65520580607644099970191344629037947109642363345790114911865982215105139553286109
19987922598218367747293012391564908008658575683495161332036771478968513273475668
46735864343218544662101362783092660392393040153359956192151489490983246408243407
39316554096929790706719123179840915104308789176161989240493466214734653692598884
96686436654005605728742749271841127133266771270867026998402357596497438196747787
61709858693233402621955968576580414264192117026363778545668636276185888303008348
30573790660202060162172580194255776587172762406396986671144599106019368617909898
14919296929084620990303238219585782864428479207448542715273692108003155056333803
33461376004844010508079541431267482307017419472683877515102219713666824297668012
03585642328633903431388323154143652480094636776820299725502963749618817677689150
60648212711534613304309572798332475438924622848235611600786209352644045126930548
10537184750277121070632987225956522046362520990987845978465681676067700787300458
42764557932143823902939237619004495050087958840224054910757824252196171778530395
40073349789503843341246949173363940416703076761551340126639752377263187678855609
45259515556136518403297779764437647108302532639266938925441074786794983296718688
95785185688373417709951904429741582228411987215821515985600608406349225705169161
34368361003731538519967775200206476051855213713393954352317267136327154057258830
00416365452997967646003979897831926534210483240243340265732173236362533669841399
13465811938019136339755430437104606945471428160653924558772345018583303665544749
01774985817306793442906284226897775720875618084106915926383849244662316876893963
29357822246212267891676799390415918850251122320083840193260849487305691988397141
38953782127653393635812071388889699452687493344262734286830916363195582506389605
26762396014901148895705438350851829240448678112011593308937886874906487369943000
07897847802159443351462134246455074605633519020115158204287956715558734278507649
59390827077697547634007861928208538818310960143267410558988463774942652380371011
98983050594993730946171406940242386056969101769871901113921235086099946035425582
13617354519280637709476966346420569724419119022883126595324480834552527465636643
90906003600940135440357355613910897013528872550179

$$\text{cateto2}(4977) = cateto1(4977) + 1$$

85091767954015520131711108036506634344932738354265465413721439800973511888385702
64881295045974006218093004261495887452598654128186410720015471907336636195960068
42319227923582362489287896755382449288625644555189029868948109667952030675480866
81642480479977543770393938117485150800780838400365429736765500146359844883766153
64461087981121924934807320074380176007856379810556699409727631356149494565040977
20526563535530469550503919191829488204691779265500180131203510132360805557079207
13211548876223728337750537121509342788586183931692296743564955402072325876095768
25406006234778855464677986766889709520082576016460079154154322351663407058685729
91376600142185854340273043801500330356165283263703003112277505541339847934931277
67351192224078838880987025045030614619882875118101904211137974999054995541573751
88062854807561205371043435926687940254331007141640628413694940449284954239618556
42663687808817611307946013443632238811545372216958531452297497474333116844451416
88198399240198255903378125668746213651139416808488813801316752573401233288533788
07339731233582647441830019731690089960569575743206004981815021073392634092642534
972278710268379263817800261974920551461835508295676323460006394999942446937982679
34624050977498577931965591043298928004720813173025623049479888188283706562208642
04884782700684583181301282013240116611556348600617745922384813030827608288247682
77827215909392519504594041153716808301274329353265354047553449468968368387591956
56506574764484138964026592316389902616147842983474921367674639765992430712244931
56242161478835888746997885558888204795335694324466060680041515284742715684329230
65520580607644099970191344629037947109642363345790114911865982215105139553286109
19987922598218367747293012391564908008658575683495161332036771478968513273475668
46735864343218544662101362783092660392393040153359956192151489490983246408243407
39316554096929790706719123179840915104308789176161989240493466214734653692598884
96686436654005605728742749271841127133266771270867026998402357596497438196747787
61709858693233402621955968576580414264192117026363778545668636276185888303008348
30573790660202060162172580194255776587172762406396986671144599106019368617909898
14919296929084620990303238219585782864428479207448542715273692108003155056333803
33461376004844010508079541431267482307017419472683877515102219713666824297668012
03585642328633903431388323154143652480094636776820299725502963749618817677689150
60648212711534613304309572798332475438924622848235611600786209352644045126930548
10537184750277121070632987225956522046362520990987845978465681676067700787300458
42764557932143823902939237619004495050087958840224054910757824252196171778530395
40073349789503843341246949173363940416703076761551340126639752377263187678855609
45259515556136518403297779764437647108302532639266938925441074786794983296718688
95785185688373417709951904429741582228411987215821515985600608406349225705169161
34368361003731538519967775200206476051855213713393954352317267136327154057258830
00416365452997967646003979897831926534210483240243340265732173236362533669841399
13465811938019136339755430437104606945471428160653924558772345018583303665544749
01774985817306793442906284226897775720875618084106915926383849244662316876893963
29357822246212267891676799390415918850251122320083840193260849487305691988397141
38953782127653393635812071388889699452687493344262734286830916363195582506389605
26762396014901148895705438350851829240448678112011593308937886874906487369943000
07897847802159443351462134246455074605633519020115158204287956715558734278507649
59390827077697547634007861928208538818310960143267410558988463774942652380371011
98983050594993730946171406940242386056969101769871901113921235086099946035425582
13617354519280637709476966346420569724419119022883126595324480834552527465636643
90906003600940135440357355613910897013528872550180

Giovanni Di Maria

APPENDICE

In questa pagina viene mostrato il sistema di equazioni lineari che caratterizza la composizione e le caratteristiche delle Terne Pitagoriche Particolari. Tali proprietà non possono applicarsi naturalmente agli altri tipi di Terne Pitagoriche.

$$\begin{cases} ipo^2 = cat1^2 + cat2^2 \\ ipo = \text{int}(ipo) \\ cat2 = 1 + cat1 \\ \dfrac{cat1(x)}{cat1(x-1)} \approx \sqrt{8} + 3 \\ \dfrac{ipo}{cat1} \approx \sqrt{2} \\ ipo(x) = \left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{8}}\right)\left(\sqrt{8} + 3\right)^x \end{cases}$$

Giovanni Di Maria